# משפט

תהי f גזירה בקטע A, כך ש חסומה בקטע. אזי f רציפה במ"ש בA.

## הערה

נניח f רציפה במ"ש – האם בהכרח חסומה?

### תשובה

לא! לדוגמה ואז לא חסומה.

# דוגמה

ב. האם רציפה במ"ש?

## פתרון

⇦ רציפה. הגבול ב הינו .  
נסתכל על הנגזרת: : , , רציפה בכל ⇦ לפי תרגיל שעשינו בכיתה חסומה. (כי הגבולות באינסוף ומינוס אינסוף קיימים וסופיים והפונקציה רציפה בכל הממשיים).

חסומה ⇦ f רציפה במ"ש.

# הגדרה

תהי f מוגדרת בקטע . נקודה נקראת מקסימום מקומי(מינימום מקומי) עבור f אם קיים כך שלכל מתקיים ()

# משפט פרמה

נניח f מוגדרת ב ו נק' מינימום או מקסימום. אם f גזירה ב אזי .

## דוגמה

ל יש מינימום באפס, אך היא אינה גזירה שם.

# משפט רול

תהי f רציפה ב וגזירה ב המקיימת . אזי קיימת נקודה בקטע כך ש.

# משפט לגרנז'(משפט ערך הממוצע)

אם f רציפה ב וגזירה ב אזי קיימת נקודה כך ש

# תרגיל

כמה "בערך" ההפרש בין לבין ?

## פתרון

נסמן . נביט בקטע . לפי לגרנז':  
כאשר , לכן:

# תרגיל

הוכי כי

## פתרון

נשים לב ש ⇦

נסתכל על הקטע והפונקציה . לפי לגרנז' קיימת c בקטע כך ש:  
אבל ⇦ ⇦ ⇦...⇦

# תרגיל

תהי f בעלת נגזרת רציפה בקטע ונניח . הוכח שקיים מספר כך שלכל x בקטע

## פתרון

נסתכל על . נניח בשלילה שלכל קיים x בקטע כך ש. לפי לגרנז' לכל x כזה קיים c בקטע כך ש ⇦ . הראינו שלכל קיים כך ש, כלומר הראינו שהנגזרת אינה חסומה, בסתירה לכך שהנגזרת רציפה בקטע סגור(ולכן חסומה).

# כלל לופיטל (רישום לא מדוייק)

תהי ותהיינה גזירות בקטע פתוח המכיל את , אזי אם   
וגם , אזי

שימו ♥: אם לא קיים לא ניתן לדעת כלום על

# הערה

זה נותר לנו כלי לחשב מספר גבולות:

## דוגמה

# תרגיל

## פתרון

לכן הגבול כולו הינו .

# תרגיל

## פתרון

# תרגיל – האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט?

דבר ראשון בודקים התכנסות בהחלט: ⇦ מתכנס ⇦ הטור מתכנס בהחלט לפי ההשוואה

נבדוק ערך מוחלט: . לפי מבחן ההשוואה הוא:  
ולכן הטורים חברים לכן מתבדר. לכן הטור אינו מתכנס בהחלט, אבל מונוטונית יורדת לאפס ולכן מתכנס לפי לייבניץ וסה"כ יש התכנסות בתנאי.

*לכן הטור מתבדר.*

# תרגיל

1) הוכח שסדרה לא עולה מתכנסת ⬄ היא חסומה מלרע

## הוכחה

חסומה ומונוטונית = מתכנסת ⇦ סדרה מתכנסת לפי משפט חסומה.

# תרגיל

תהי f פונקציה גזירה ב המקיימת שם. הוכח שf רציפה במ"ש ב

## פתרון

נניח בשלילה שקיים כך שלכל קיים כך ש אבל   
ואז ניקח ונקבל בסתירה לכך שהנגזרת חסומה.